

Leçon 226 : Suites vectorielles et réelles définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$. Exemples. Applications à la résolution approchée d'équations.

[Ber-Ber] : *Analyse pour l'agrégation de mathématiques*, Julien Bernis, Laurent Bernis

[Dem] : *Analyse numérique et équations différentielles*, Jean-Pierre Demailly

[Gou] : *Analyse*, Xavier Gourdon

[Las] : *Analyse numérique matricielle appliquée à l'art de l'ingénieur - Tome 1 et 2*, Patrick Lascaux

[Rom] : *Analyse réelle*, Jean-Étienne Rombaldi

[Sch] : *Analyse numérique : une approche mathématique*, Michelle Schatzman

I Partie A- Simple, Basique [Gou]

I.1 Généralités

Déf 1 : Une suite $(u_n)_n$ est dite récurrent d'ordre 1 si on peut écrire : $u_{n+1} = f(u_n)$.

Ex 2 : $u_{n+1} = u_n^2$.

Déf 3 : Une suite $(u_n)_n$ est dite récurrent d'ordre p si on peut écrire : $u_{n+p} = f(u_{n+p-1}, \dots, u_n)$.

Ex 4 : Suite de Fibonacci : $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.

I.2 Exemples élémentaires

Déf 5 : Suites arithmétiques : $u_{n+1} = u_n + a$.

Prop 6 : Si u_n est arithmétique de raison a : $u_n = u_0 + na$.

Déf 7 : Suites géométrique : $u_{n+1} = qu_n$.

Prop 8 : Si u_n est géométrique de raison q : $u_n = q^n u_0$.

Déf 9 : Suites récurrentes linéaires : $u_n = a_1 u_{n-1} + \dots + a_p u_{n-p}$.

Prop 10 : Si u_n est récurrente linéaire d'équation caractéristique $X^p - a_1 X^{p-1} - \dots - a_p = 0$, en notant (r_i, m_i) ses racines avec multiplicité, alors : $u_n = P_1(n)r_1^n + \dots + P_k(n)r_k^n$, où les P_i vérifient $\deg(P_i) < m_i$.

Ex 11 : Suite de Fibonacci : $u_n = A\varphi_+^n + B\varphi_-^n$ où $\varphi_{\pm} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$.

II Partie B - Des théorèmes de point fixe [Ber-Ber] [Rom]

Thm 12 (Point fixe de Banach-Picard) :

Contre-Ex 13 :

App 14 : Cauchy-Lipschitz

Prop 15 : Si $f : E \rightarrow E$ est telle que f^p soit contractante, alors elle admet un unique point fixe, limite de toute orbite.

Dév 16 (Point fixe sur les compacts) : Soit E un espace métrique compact, et $f : E \rightarrow E$, telle que $\forall x \neq y, d(f(x), f(y)) < d(x, y)$. Alors f admet un unique point fixe α et pour tout $x \in E$, la suite des itérés $(f^n(x))_n$ converge vers α .

Dév 17 : Si $a = \left(\frac{1}{d+1}\right)^{1/d}$, la fonction $f : x \in [0, a] \rightarrow x - x^{d+1} \in [0, a]$ admet un unique point fixe 0, et pour toute suite d'itérées (x_n) telles que $x_0 \neq 0$, on a $x_n \equiv 1/(dn)^{1/d}$.

III Partie C - Suites réelles [Rom]

III.1 Suites récurrentes réelles

Prop 18 : Si $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ est continue ou croissante, alors elle admet au moins un point fixe $\alpha \in [a, b]$.

Contre-Ex 19 : $f(x) = \mathbb{1}_{[0, 0.5]}(x)$ n'a pas de points fixes.

Ex 20 : $\cos(x)$ possède un point fixe dans $[0, 1]$.

Prop 21 : Si $f : I \rightarrow I$ est croissante, alors la suite $f^n(x_0)$ est monotone (suivant si $f(x_0) \geq x_0$ ou non). Si I est borné, alors les itérés convergent et si de plus f est continue, la limite est un point fixe.

Prop 22 : Si $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ est continue ou croissante, alors elle admet au moins un point fixe $\alpha \in [a, b]$.

Contre-Ex 23 : $f(x) = \mathbb{1}_{[0, 0.5]}(x)$ n'a pas de points fixes.

Ex 24 : $\cos(x)$ possède un point fixe dans $[0, 1]$.

Prop 25 : Si $f : I \rightarrow I$ est croissante, alors la suite $f^n(x_0)$ est monotone (suivant si $f(x_0) \geq x_0$ ou non). Si I est borné, alors les itérés convergent et si de plus f est continue, la limite est un point fixe.

III.2 Application aux développements asymptotiques

Prop 26 : Soit f à valeurs réelles continue sur $] -1, 1[$, et admettant un DL en 0 de la forme : $f(x) = x - \alpha x^{p+1} + \beta x^{2p+1} + o(x^{2p+1})$. Alors on a le développement asymptotique sur les itérées :

$$x_n = \frac{A}{n^{1/p}} - B \frac{\ln(n)}{nn^{1/p}} + o\left(\frac{\ln(n)}{nn^{1/p}}\right),$$

avec A, B des constantes dépendants de p, α et β .

Ex 27 : Si $u_{n+1} = \ln(1 + u_n)$, $u_n = \frac{2}{n} + \frac{2\ln(n)}{3n^2} + o\left(\frac{\ln(n)}{n^2}\right)$.

Rem 38 : La convergence est alors géométrique, de facteur géométrique ρ .

 **Dév 39 (Accélération de Tchebychev) :**

IV.4 EDO : allons-y étape par étape [Dem]

Déf 40 (Méthode de pas 1) :

Ex 41 : Voir [Dem].

Thm 42 (Convergence d'Euler) :

IV Partie D - De l'analyse numérique ! [Sch] [Las]

IV.1 Méthode de Newton

Thm 28 (Méthode de Newton) :

Ex 29 : $f(x) = x^2 - a$, la méthode de Newton converge quadratiquement vers $\sqrt{a}$. (Annexe [Sch] Tableau Valeurs à chaque itération).

IV.2 Méthode de la sécante

Thm 30 (Méthode de la sécante) :

Rem 31 : Pas besoin d'avoir les dérivées pour appliquer la méthode, au prix d'une convergence plus lente.

Rem 32 : La méthode de la sécante est d'ordre géométrique $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

IV.3 Méthodes itératives

Déf 33 : Soit $A = M - N$ avec $M \in GL_n(\mathbb{R})$. La méthode itérative associée à cette décomposition est $Mx_{k+1} = Nx_k + b$ pour $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

Ex 34 : La méthode de Jacobi : $M = D$ et $N = E + F$ [Faire dessin pour D, E et F].

Ex 35 : La méthode de Gauss-Seidel : $M = D - E$ et $N = F$.

Thm 36 : La méthode itérative $A = M - N$ converge pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^n$ et tout $b \in \mathbb{R}^n$ si et seulement si $\rho(M^{-1}N) < 1$.

Ex 37 : Exemple 2 p. 330 [Las]